

# SYSTÈMES DYNAMIQUES

## Feuille d'exercices 13

### Exercice 1. *Théorème de Furstenberg-Kesten*

On pose  $\varphi_n = \log \|A^n\|$ . Il suffit de montrer que  $(\varphi_n)$  est sous-additive. On a, si  $\|\cdot\|$  est une norme d'opérateur (i.e.  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ ),

$$\begin{aligned} \varphi_{n+m}(x) &= \log \|A^{n+m}(x)\| \\ &= \log \left\| A(f^{n+m-1}(x)) \cdots A(f^{m-1}(x)) \cdots A(x) \right\| \\ &= \log \left\| A(f^{n+m-1}(x)) \cdots A(f^{m-1}(x)) \right\| \\ &\quad + \log \left\| A(f^{m-1}(x)) \cdots A(x) \right\| \\ &= \varphi_m(x) + \varphi_n(f^m(x)). \end{aligned}$$

Le résultat pour la norme  $\|\cdot\|$  est alors une conséquence du théorème ergodif sous-additif de Kingman. Si  $\|\cdot\|'$  est une autre norme, on a pour un  $C > 0$

$$\frac{\log(1/C)}{n} + \frac{1}{n} \log \|A^n\| \leq \frac{1}{n} \log \|A^n\|' \leq \frac{\log C}{n} + \frac{1}{n} \log \|A^n\|,$$

ce qui conclut.

### Exercice 2. *Formule d'Herman*

1. La transformation  $R_\alpha$  est ergodique, donc  $\lambda_\pm$  est constante.

2. On a

$$\begin{pmatrix} \frac{1 + e^{2i\theta}}{2} & \frac{1 - e^{-2i\theta}}{2} \\ \frac{e^{2i\theta} - 1}{2i} & \frac{1 + e^{2i\theta}}{2} \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

3. Rappel :  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  est sous-harmonique si pour tout  $z \in U$  et  $r > 0$  tel que  $B(z, r) \subset U$ , on a

$$f(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

On note que si  $\varphi : U \rightarrow \mathbf{C}$  est holomorphe et ne s'annule pas, alors  $z \mapsto \log |\varphi(z)|$  est harmonique. En effet,

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \log |\varphi(z)| = \partial_z \partial_{\bar{z}} (\log \varphi(z) + \log \bar{\varphi}(z)) = 0.$$

Chaque coefficient de  $C_n(z)$  dépend de manière holomorphe de  $z$ , et donc  $z \mapsto |C_n(z)_{ij}|$  est harmonique pour tous  $ij$ .

En particulier si  $\|A\| = \max_{ij} |a_{ij}|$  on a que  $z \mapsto \log \|C_n(z)\|$  est sous-harmonique.

4. On a

$$\lambda_+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int \log \|A^n(x)\| d\mu(x).$$

Mais

$$\begin{aligned} C_n(e^{2i\pi x}) &= A_\sigma e^{2i\pi((n-1)\alpha+x)} R_{2\pi((n-1)\alpha+x)} \cdots A_\sigma e^{2i\pi x} R_{2\pi x} \\ &= e^{2i\pi\tau(x)} A^n(x), \end{aligned}$$

où

$$\tau(x) = nx + \sum_{k=0}^{n-1} k\alpha = nx + \frac{n(n-1)}{2}\alpha.$$

Par la question 3. on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \int_0^1 \log \|C_n(e^{2i\pi x})\| dx \geq \lim_n \frac{1}{n} \log \|C_n(0)\|.$$

Or on a

$$\begin{aligned} C_n(0) &= \left( A_\sigma \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{-1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)^n \\ &= \frac{1}{2^n} \left( A_\sigma \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \right)^n \\ &= \frac{1}{2^n} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma & -i\sigma \\ i\sigma^{-1} & \sigma^{-1} \end{pmatrix}}_B. \end{aligned}$$

On a  $\text{sp}(B) = \{0, \sigma + \sigma^{-1}\}$ . Par suite

$$\frac{1}{n} \log \|C_n(0)\| = \frac{1}{n} \log \left\| \left( \frac{B}{2} \right)^n \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \log \rho(B/2) = \log \frac{\sigma + \sigma^{-1}}{2}.$$

### Exercice 3. Produits de matrices aléatoires

On note  $f = \sigma$  le décalage sur  $\Sigma = \{1, \dots, m\}^{\mathbf{N}}$ , et  $\mu = (p_1, \dots, p_m)^{\otimes \mathbf{N}}$ . On définit alors  $A : \Sigma \rightarrow \text{GL}(d, \mathbf{R})$  par

$$A(x) = A_{x_0}, \quad x = (x_0, x_1, \dots) \in \Sigma.$$

Alors, avec les notations de l'Exercice 1., on a

$$A^n(x) = A_{x_{n-1}} \cdots A_{x_0}, \quad x = (x_k) \in \Sigma.$$

Alors par l'Exercice 1. on a

$$\frac{1}{n} \log \|A^n(x)\| \rightarrow \lambda \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$$

avec  $\lambda$  une constante (car  $f$  est ergodique). De plus  $\lambda > -\infty$ . En effet on a  $\nu > 1$  tel que

$$\nu^{-n} \|v\| \leq A^n(x) \leq \nu^n \|v\|, \quad v \in \mathbf{R}^d, \quad x \in \Sigma,$$

ce qui donne  $\lambda \geq -\log \nu > -\infty$ .

### Exercice 4. Théorème d'Osedelets en dimension 2

1. Si  $A \in \text{SL}(2, \mathbf{R})$  on a  $\|A^{-1}\|^{-1} = \|A\|^{-1}$ , et donc

$$-\lambda_+(x) = \lim_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|^{-1} = \lim_n \frac{1}{n} \log \|A^{-n}(x)\|^{-1} = \lambda_-(x).$$

2. On a

$$\begin{aligned}\|A^n(x)\|^{-1}\|v\| &= \|A^n(x)^{-1}\|^{-1}\|v\| \\ &\leq \|A^n(x)v\| \\ &\leq \|A^n(x)\|\|v\|.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{n} \log \left( \|A^n(x)^{-1}\|^{-1}\|v\| \right) \geq \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \leq \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|\|v\|.$$

Cela donne

$$\lambda_-(x) \leq \liminf_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \leq \limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \leq \lambda_+(x).$$

3. Fait : pour tout  $B \in \text{SL}(2)$ , il existe  $u, v \in \mathbf{R}^2$  tels que  $u \perp v$  et

$$\|u\| = \|v\| = 1, \quad \|Bv\| = \|B\|^{-1}, \quad \|Bu\| = \|B\|, \quad \langle Bu, Bv \rangle = 0.$$

En effet, on prend  $(u, v)$  qui diagonalise  $B^\top B$  avec  $B^\top Bu = \lambda u$  et  $B^\top Bv = \lambda^{-1} v$  avec  $\lambda \geq \lambda^{-1}$ . On a alors  $\lambda = \|B\|$ , ce qui conclut.

4. Le nombre  $\alpha_n$  est défini par

$$s_n(x) = \sin(\alpha_n)u_{n+1}(x) + \cos(\alpha_n)s_{n+1}(x).$$

On a

$$\begin{aligned}\|A^{n+1}(x)s_n(x)\| &\geq \|\sin(\alpha_n)A^{n+1}(x)u_{n+1}(x)\| \\ &= |\sin(\alpha_n)|\|A^{n+1}(x)\|.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\|A^{n+1}(x)s_n(x)\| &\leq \|A(f^n(x))\|\|A^n(x)s_n(x)\| \\ &= \|A(f^n(x))\|\|A^n(x)\|^{-1}\end{aligned}$$

Il suit que

$$|\sin(\alpha_n)| \leq \frac{\|A(f^n(x))\|}{\|A^{n+1}(x)\|\|A^n(x)\|}.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \log \|A(f^n(x))\| &= \frac{1}{n} \log \|A(x)\| + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \frac{\|A(f^{k+1}(x))\|}{\|A(f^k(x))\|} \\ &= \frac{1}{n} \log \|A(x)\| + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi(f^k(x)),\end{aligned}$$

où  $\psi(x) = \log \|A(f(x))\| - \log \|A(x)\|$ . Alors  $\psi \in L^1(\mu)$  et donc le théorème ergodique de Birkhoff implique que la limite

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \|A(f^n(x))\|$$

existe pour  $\mu$ -presque tout  $x$ .

D'autre part puisque  $\log \|A\| \in L^1$  on a, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mu \left( \left\{ x : \frac{1}{n} \log \|A(f^n(x))\| > \varepsilon \right\} \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

En conséquence  $\frac{1}{n} \log \|A(f^n(\cdot))\| \rightarrow 0$  en probabilités quand  $n \rightarrow +\infty$ . Comme  $\frac{1}{n} \log \|A(f^n(\cdot))\|$  converge aussi  $\mu$ -pp quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a que  $\frac{1}{n} \log \|A(f^n(\cdot))\| \rightarrow 0$   $\mu$ -pp.

Par conséquent

$$\frac{1}{n} \log |\sin(\alpha_n)| \leq \frac{1}{n} \log \|A(f^n(x))\| - \frac{1}{n} \log \|A^{n+1}(x)\| - \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|,$$

et donc

$$\limsup_n \frac{1}{n} |\sin(\alpha_n)| \leq -2\lambda_+(x).$$

5. Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\beta = 2\lambda_+(x) - \varepsilon > 0$ . On a pour tout  $n$  assez grand

$$|\sin(\alpha_n)| \leq \exp(-\beta n).$$

Ceci implique pour tous  $m \geq n \geq 0$

$$\text{dist}_{\mathbf{R}P^1}(s_n(x), s_m(x)) \leq C \sum_{k=n}^{m-1} e^{-\beta k} \leq \frac{Ce^{-\beta n}}{1 - e^{-\beta}},$$

ce qui conclut. Ici on a utilisé  $\text{dist}_{\mathbf{R}P^1}(u, v) \leq C \sin(\text{angle}(u, v))$ .

6. Soit  $\beta_n$  l'angle entre  $s(x)$  et  $s_n(x)$ . Alors  $s(x) = \cos \beta_n s_n(x) + \sin \beta_n u_n(x)$  et donc

$$\|A^n(x)s(x)\| \leq |\cos \beta_n| \|A^n(x)s_n(x)\| + |\sin \beta_n| \|A^n(x)u_n(x)\|.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)s(x)\| \\ & \leq \max \left\{ \limsup_n \frac{1}{n} |\cos \beta_n| \|A^n(x)s_n(x)\|, \limsup_n \frac{1}{n} |\sin \beta_n| \|A^n(x)u_n(x)\| \right\} \\ & \leq \max \left\{ \limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|^{-1}, \right. \\ & \quad \left. \limsup_n \frac{1}{n} \log |\sin \beta_n| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|A^n(x)u_n(x)\| \right\} \\ & \leq \max\{-\lambda_+(x), -2\lambda_+(x) + \lambda_+(x)\} = -\lambda_+(x). \end{aligned}$$

Ceci conclut.

7. Soit  $\gamma_n$  l'angle entre  $v$  et  $s_n(x)$ . Alors  $v = \cos \gamma_n s_n(x) + \sin \gamma_n u_n(x)$  et donc

$$\|A^n(x)v\| \geq |\sin \gamma_n| \|A^n(x)u_n(x)\| - |\cos \gamma_n| \|A^n(x)s_n(x)\|$$

par la question **3.**. Puisque  $|\sin \gamma_n| \geq c$  pour un  $c > 0$  pour  $n$  grand (puisque  $v \neq s(x)$  et  $s_n(x) \rightarrow s(x)$ ) on a

$$\|A^n(x)v\| \geq c \|A^n(x)\| - \|A^n(x)\|^{-1}.$$

Ceci implique  $\liminf_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \geq \lambda_+(x)$  (car  $\limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|^{-1} = -\lambda_+(x)$ ). Pour l'autre inégalité on remarque que

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| \leq \limsup_n \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\| = \lambda_+(x).$$

8. La question **6.** donne

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \|A^n(f(x))A(x)s(x)\| = \lim_n \frac{1}{n+1} \|A^{n+1}(x)s(x)\| = -\lambda_+(x).$$

D'autre part la question **7.** donne

$$\lim_n \frac{1}{n} \|A^n(f(x))v\| = \lambda_+(x)$$

pour tout  $v$  qui n'est pas colinéaire à  $s(f(x))$ . On obtient que  $A(x)s(x)$  est colinéaire à  $s(f(x))$ .

On suppose maintenant  $f$  inversible.

9. Si  $\lambda_+(x) > 0$  on définit  $E_s(x) = \mathbf{R}s(x)$  et  $E_u(x) = \mathbf{R}u(x)$ . Alors, par les questions qui précèdent, cette décomposition vérifie les propriétés demandées.