École Normale Supérieure
2021/2022

chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Corrigé 4

Exercice 1. *Exposants de Lyapunov pour les systèmes linéaires*

1. On a
$$\exp(-|t|\|A\|) \leq \|\exp(tA)\| \leq \exp(|t|\|A\|), \quad t \in \mathbf{R}.$$
En particulier si $x_0 \neq 0$ on a
$$-\|A\| + \frac{1}{|t|}\log\|x_0\| \leq \frac{1}{t}\log\|\mathrm{e}^{tA}x_0\| \leq \|A\| + \frac{1}{|t|}\log\|x_0\|, \quad t \in \mathbf{R}.$$
Ceci montre que $\lambda(x_0, A)$ est fini. Si $\|\cdot\|'$ est une autre norme sur $\mathbf{R}^n$, alors il existe des constantes $c, C > 0$ telles que
$$\log c + \log\|\mathrm{e}^{tA}x_0\| \leq \log\|\mathrm{e}^{tA}x_0\|' \leq \log C + \log\|\mathrm{e}^{tA}x_0\|, \quad t \in \mathbf{R},$$
ce qui conclut.

2. On a
$$\begin{aligned}\lambda(y_0, B) &= \limsup \frac{1}{t}\log\|\mathrm{e}^{tB}y_0\| \\ &= \limsup \frac{1}{t}\log\|\mathrm{e}^{tP^{-1}AP}y_0\| \\ &= \limsup \frac{1}{t}\log\|P^{-1}\mathrm{e}^{tA}Py_0\| \\ &= \lambda(Py_0, A),\end{aligned}$$
par la question 1., puisque $\|P^{-1}\cdot\|$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.

3. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$; on suppose que A est un bloc de Jordan pour λ, de sorte que
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{tA} = \exp(\lambda t)\begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & t \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
Soit $x_0 = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \setminus 0$. On note $\mathrm{e}^{tA}x_0 = \begin{pmatrix}\alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t)\end{pmatrix}$; on a
$$\alpha_j(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{k=j}^{n}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}\alpha_k, \quad j = 1, \ldots, n, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Soit $i = \max\{j \in \{1, \ldots, n\},\ \alpha_j \neq 0\}$. Alors $\alpha_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\alpha_i$ pour tout t, et donc

$$\log \|\mathrm{e}^{tA}x_0\|_\infty \geq \lambda t + \log|\alpha_i|.$$

On a aussi, pour un certain polynôme P,

$$\log \|\mathrm{e}^{tA}x_0\|_\infty \leq \lambda t + \log|P(t)| + \log\|x_0\|_\infty, \quad t \in \mathbf{R}.$$

On obtient bien

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t}\log\|\mathrm{e}^{tA}x_0\| = \lambda.$$

On suppose maintenant que $\lambda = r + i\nu$ avec $r, \nu \in \mathbf{R}$, et que A est un bloc de Jordan pour λ, i.e. $n = 2m$ est pair et

$$A = \begin{pmatrix} D & I_2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ (0) & & & D \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} r & -\nu \\ \nu & r \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Soit $x_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \setminus 0$. Alors en notant $\alpha_j(t)$ et $\beta_j(t)$ les coordonnées $2j-1$ et $2j$ de $\mathrm{e}^{tA}x_0$ ($j = 1, \ldots, m$), on a, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\alpha_j(t) = \mathrm{e}^{rt}\sum_{k=j}^{m}(\alpha_k\cos(\nu t) - \beta_k\sin(\nu t))\frac{t^{k-j}}{(k-j)!},$$
$$\beta_j(t) = \mathrm{e}^{rt}\sum_{k=j}^{m}(\alpha_k\sin(\nu t) + \beta_k\cos(\nu t))\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}.$$

Soit $i = \max\{j \in \{1, \ldots, m\},\ (\alpha_j, \beta_j) \neq (0,0)\}$. Alors

$$\alpha_i(t) = \mathrm{e}^{rt}(\alpha_i\cos(\nu t) - \beta_i\sin(\nu t)), \quad \beta_i(t) = \mathrm{e}^{rt}(\alpha_i\sin(\nu t) + \beta_i\cos(\nu t)), \quad t \in \mathbf{R}.$$

En particulier $\|(\alpha_i(t), \beta_i(t))\|_2 = \mathrm{e}^{rt}\|(\alpha_i, \beta_i)\|_2$, ce qui donne

$$\log\|e^{tA}x_0\|_2 \geq rt + \log\|(\alpha_i, \beta_i)\|_2, \quad t \in \mathbf{R}.$$

On a par ailleurs, pour un certain polynôme P,

$$\log\|\mathrm{e}^{tA}x_0\|_2 \leq rt + \log|P(t)|, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Cela donne encore une fois

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t}\log\|\mathrm{e}^{tA}x_0\| = r.$$

Dans le cas où A n'est pas un bloc de Jordan, le théorème de décomposition de Jordan et la question 2. permettent de se ramener aux cas précédents.

4. Soit $v \in V_j \setminus V_{j+1}$. Alors v est de la forme $v = v' + w$ avec $v' \in L_j \setminus 0$ et $w \in V_{j+1}$. On sait par la question précédente que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log\|\mathrm{e}^{tA}v'\| = r_j.$$

En particulier, pour tout $r < r_j$, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\mathrm{e}^{tA} v'\| \geq C \mathrm{e}^{rt}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

On fixe deux réels r, r' tels que $r_{j+1} < r' < r < r_j$. Alors il existe $C' > 0$ telle que $\|\mathrm{e}^{tA} w\| \leq C' \mathrm{e}^{r' t}$ pour tout $t \geq 0$. En particulier on a $\|\mathrm{e}^{tA} w\| / \|\mathrm{e}^{tA} v'\| \to 0$ quand $t \to +\infty$. Ceci donne alors

$$\frac{1}{t} \log \|\mathrm{e}^{tA} v\| = \frac{1}{t} \log \|\mathrm{e}^{tA} v' + \mathrm{e}^{tA} w\| \to r_j, \quad t \to +\infty.$$

La réciproque est alors immédiate puisque $\mathbf{R}^n = \bigoplus_j L_j$.

On procède identiquement pour la seconde équivalence.

5. Soit $M \in U_{a,b}$ et

$$d_M(z) = \frac{\chi_M'(z)}{\chi_M(z)}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \mathrm{sp}(M).$$

où χ_M est le polynôme caractéristique de M. Alors d est méromorphe sur $\mathbf{C}$ et a un pôle simple en λ pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(M)$, avec résidu égal à $\dim_{\mathbf{C}} C_{\lambda,\mathbf{C}}$, où

$$C_{\lambda,\mathbf{C}} = \{u \in \mathbf{C}^n,\ \exists N \in \mathbf{N},\ (A - \lambda)^N u = 0\}.$$

En particulier, puisque pour tout $\lambda \notin \mathbf{R}$ on a $\dim_{\mathbf{C}} C_{\lambda,\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbf{R}} C_{\lambda,\bar{\lambda}}$, on obtient

$$\dim L(a, b, M) = \int_{\mathscr{C}_{a,b}} d_M(z) \mathrm{d}z,$$

où $\mathscr{C}_{a,b}$ est un chemin lisse fermé entourant dans le sens direct les valeurs propres de M qui ont une partie réelle dans $]a, b[$, et qui ne rencontre pas le spectre de M. On choisit aussi deux autres lacets $\mathscr{C}_{<a}$ et $\mathscr{C}_{>b}$ qui entourent dans le sens direct les valeurs propres de M ayant une partie réelle respectivement dans $]-\infty, a[$ et dans $]b, +\infty[$, et n'intersectant pas le spectre de M.

En particulier on a $|\chi_M| > \varepsilon$ sur $\mathscr{C}_{<a} \cup \mathscr{C}_{a,b} \cup \mathscr{C}_{>b}$ pour un $\varepsilon > 0$. Par continuité de $M' \mapsto \chi_M'$, on sait qu'il existe un voisinage connexe U de M tel que pour toute matrice $M' \in U$, on a $|\chi_{M'}| > \varepsilon/2$ sur $\mathscr{C}_{a,b}$.

En particulier, les applications

$$M' \mapsto \int_{\mathscr{C}} d_{M'}(z) \mathrm{d}z, \quad \mathscr{C} = \mathscr{C}_{<a},\ \mathscr{C}_{a,b},\ \mathscr{C}_{>b},$$

sont bien définies et continues $U \to \mathbf{C}$. Comme elles sont à valeurs dans $\mathbf{Z}$, elles sont constantes. En particulier on a

$$n = \int_{\mathscr{C}_{<a}} d_{M'}(z) \mathrm{d}z + \int_{\mathscr{C}_{a,b}} d_{M'}(z) \mathrm{d}z + \int_{\mathscr{C}_{>b}} d_{M'}(z) \mathrm{d}z,$$

puisque cette égalité est vraie pour $M' = M$ (par le lemme des noyaux). Ceci implique que toutes les valeurs propres de M' sont contenues dans les zones délimitées par $\mathscr{C}_{<a}$, $\mathscr{C}_{a,b}$ et $\mathscr{C}_{>b}$, ce qui conclut.

Exercice 2. *Stabilité de* 0 *pour les systèmes linéaires*

1. <u>(i) $\implies$ (iii)</u>. Supposons que 0 est un point fixe asymptotiquement stable. Soit λ une valeur propre de A. Alors tout $u \in C_{\lambda,\bar{\lambda}}$ (avec les notations de l'exercice précédent) vérifie $\frac{1}{t}\log \|\mathrm{e}^{tA}u\| \to \Re(\lambda)$ quand $t \to +\infty$. Puisque $\mathrm{e}^{tA}u \to 0$ on a nécessairement $\Re(\lambda) \leq 0$. Supposons $\Re(\lambda) = 0$. Alors la correction de la question 3. de l'**Exercice 1.** montre qu'on peut trouver $u \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|\mathrm{e}^{tA}u\| \geq \delta$ pour tout t, pour un $\delta > 0$. C'est absurde, donc $\Re(\lambda) < 0$.

   <u>(iii) $\implies$ (ii)</u>. Pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ et $u \in C_{\lambda,\bar{\lambda}}$ on a pour un certain polynôme P

$$\|\mathrm{e}^{tA}u\| \leq C\mathrm{e}^{\Re(\lambda)t}|P(t)|, \quad t \geq 0.$$

   Puisque $\mathbf{R}^n = \bigoplus_\lambda C_{\lambda,\bar{\lambda}}$, on que pour tout $0 > a > \sup_{\lambda\in\mathrm{sp}(A)} \Re\lambda$, il existe $c > 0$ tel que

$$\|\mathrm{e}^{tA}x\| \leq c\mathrm{e}^{-at}\|x\|, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0. \tag{3}$$

   <u>(ii) $\implies$ (iv)</u>. Par linéarité de e^{tA}, il existe $c, a > 0$ tels que (3) est vérifiée. On pose alors

$$\|x\|_A = \int_0^\tau \mathrm{e}^{bt}\|\mathrm{e}^{tA}x\|\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

   où $b, \tau > 0$ satisfont

$$c\mathrm{e}^{-(a-b)\tau} < 1.$$

   On peut supposer $c \geq 1$, sinon la norme $\|\cdot\|$ convient. Ceci implique $a \geq b$. Alors

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{TA}x\|_A &= \int_0^\tau \mathrm{e}^{bt}\|\mathrm{e}^{(t+T)A}x\|\mathrm{d}t \\
&= \int_T^{T+\tau} \mathrm{e}^{b(t-T)}\|\mathrm{e}^{tA}x\|\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-bT}\int_T^{T+\tau} \mathrm{e}^{bt}\|\mathrm{e}^{tA}x\|\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-bT}\left(\int_T^0 \mathrm{e}^{bt}\|\mathrm{e}^{tA}x\|\mathrm{d}t + \int_0^\tau \mathrm{e}^{bt}\|\mathrm{e}^{tA}x\|\mathrm{d}t + \int_\tau^{\tau+T} \mathrm{e}^{bt}\|\mathrm{e}^{tA}x\|\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{e}^{-bT}\|x\|_A + \mathrm{e}^{-bT}\left(\int_\tau^{\tau+T} \mathrm{e}^{bt}\|\mathrm{e}^{tA}x\|\mathrm{d}t - \int_0^T \mathrm{e}^{bt}\|\mathrm{e}^{tA}x\|\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

   On a

$$\begin{aligned}
\int_\tau^{\tau+T} \mathrm{e}^{bt}\|\mathrm{e}^{tA}x\|\mathrm{d}t &\leq c\int_\tau^{\tau+T} \mathrm{e}^{bt}\mathrm{e}^{-at}\|x\|\mathrm{d}t \\
&\leq c\mathrm{e}^{-(a-b)\tau}\frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-(a-b)T}\right)}{a-b}\|x\|
\end{aligned}$$

   D'autre part on a

$$\int_0^T \mathrm{e}^{bt}\|\mathrm{e}^{tA}x\|\mathrm{d}t \geq \int_0^T \mathrm{e}^{bt}\mathrm{e}^{-t\|A\|}\|x\|\mathrm{d}t \geq \frac{1 - \mathrm{e}^{-T(\|A\|-b)}}{\|A\| - b}\|x\|.$$

   On a

$$c\mathrm{e}^{-(a-b)\tau}\frac{1 - \mathrm{e}^{-(a-b)T}}{a-b} - \frac{1 - \mathrm{e}^{-T(\|A\|-b)}}{\|A\| - b} = \left(c\mathrm{e}^{-(a-b)\tau} - 1\right)T + \mathcal{O}(T^2), \quad T \to 0.$$

   En particulier cette quantité est négative pour $T > 0$ assez petit. On a donc obtenu $\delta > 0$ tel que pour $T \leq \delta$ on a

$$\|\mathrm{e}^{TA}\|_A \leq \mathrm{e}^{-bT}\|x\|_A, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Soit $T' > 0$. On écrit $T' = n\delta + T$ avec $0 \leq T < \delta$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\|\mathrm{e}^{T'A}x\|_A \leq \|\mathrm{e}^{\delta A}\cdots \mathrm{e}^{\delta A}\mathrm{e}^{TA}x\|_A \leq \mathrm{e}^{-bn\delta}\mathrm{e}^{-bT}\|x\|_A \leq \mathrm{e}^{-bT'}\|x\|_A,$$

ce qui conclut.

<u>(iv) $\Longrightarrow$ (i)</u>. évident.

2. Supposons que $\lambda = r + i\nu \in \mathrm{sp}(A)$ avec $\nu \in \mathbf{R}$ et $r \geq 0$. On suppose que A est un bloc de Jordan associé à λ, qui est non trivial (i.e. de la forme (1) et de taille > 1 ou de la forme (2) et de taille > 2 selon que ν soit nul ou non). Alors si $x = (\,0, \ldots, 0, 1\,)^{\perp}$, on vérifie aisément que $\limsup_{t\to+\infty} \|\mathrm{e}^{tA}x\| = +\infty$.

   Réciproquement, supposons que les valeurs propres de A ont toutes des parties réelles négatives ou nulles, et que les valeurs propres ayant une partie réelle nulle vérifient la condition de semi-simplicité. Alors on vérifie aisément que $\sup_{t\in\mathbf{R}} \|\mathrm{e}^{tA}\| < +\infty$ (en regardant la décomposition de Jordan), ce qui conclut.

Exercice 3. *Systèmes linaires topologiquement conjugués*

1. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ non nul. Alors $\lim_{t\to\pm\infty} \log \|\mathrm{e}^{tA}x\|_A = \mp\infty$; de plus $t \mapsto \log \|\mathrm{e}^{tA}x\|_A$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ puisque

$$\|\mathrm{e}^{tA}y\|_A \leq \mathrm{e}^{-at}\|y\|_A, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathbf{R}^n,$$

   pour un certain $a > 0$, ce qui implique aussi

$$\|\mathrm{e}^{-tA}y\|_A \geq \mathrm{e}^{at}\|y\|_A, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathbf{R}^n.$$

   Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $\tau(x) \in \mathbf{R}$ tel que $\mathrm{e}^{\tau(x)A}x \in S_A$. Montrons que τ est continue. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus 0$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\|\mathrm{e}^{\tau(x_0)A}x_0 - \mathrm{e}^{\tau(x_0)}x\|_A \leq C\|x - x_0\|_A.$$

   Soit $\varepsilon > 0$; si $\|x - x_0\|_A \leq \varepsilon$ on a

$$1 - C\varepsilon \leq \|\mathrm{e}^{\tau(x_0)A}x\| \leq 1 + C\varepsilon.$$

   Posons

$$t_\pm = \pm\frac{1}{a}\log(1 \pm C\varepsilon).$$

   Alors

$$\|\mathrm{e}^{t_+A}\mathrm{e}^{\tau(x_0)A}x\|_A \leq \mathrm{e}^{-at_+}(1 + C\varepsilon) = 1$$

   et de même

$$\|\mathrm{e}^{-t_-A}\mathrm{e}^{\tau(x_0)A}\| \geq 1$$

   En particulier, on a que $|\tau(x) - \tau(x_0)| \leq \max(t_+, t_-)$, avec $t_\pm \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, et donc τ est continue.

2. On a que $\tau(\mathrm{e}^{tA}x) = \tau(x) - t$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ non nul et tout $t \in \mathbf{R}$. Ceci implique que

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\tau(\mathrm{e}^{tA}x)B}\varphi(\mathrm{e}^{\tau(\mathrm{e}^{tA}x)A}\mathrm{e}^{tA}x) &= \mathrm{e}^{-(\tau(x)-t)B}\varphi(\mathrm{e}^{(\tau(x)-t)A}\mathrm{e}^{tA}x)\\ &= \mathrm{e}^{tB}\mathrm{e}^{-\tau(x)B}\varphi(\mathrm{e}^{\tau(x)A}x).\end{aligned}$$

On a bien $\Phi \circ \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tB} \circ \Phi$. De plus Φ est continue sur $\mathbf{R}^n \setminus 0$ par continuité de τ et de φ. Elle est continue en 0 car $\tau(x) \to -\infty$ quand $x \to 0$, et donc pour un $b > 0$ on a

$$\|\Phi(x)\|_B \le \mathrm{e}^{-\tau(x)b}\|\varphi(\mathrm{e}^{\tau(x)A}x)\|_B \le C\mathrm{e}^{-\tau(x)b} \to 0, \quad x \to 0.$$

Enfin, si $\Psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est définie comme Φ en interchangeant les rôles de A et de B, on obtient $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}$, ce qui conclut.

3. On pose pour $M = A, B$, avec les notations de l'**Exercice 1.**,

$$E^s(M) = \bigoplus_{\Re(\lambda)<0} C_{\lambda,\bar{\lambda}}(M), \quad E^u(M) = \bigoplus_{\Re(\lambda)>0} C_{\lambda,\bar{\lambda}}(M).$$

Par la question **1.**5., on a que $\dim E^s(A_t) = \dim E^s(A)$ pour tout t et donc $\dim E^s(A) = \dim E^s(B)$. En particulier, par la question précédente, il existe des isomorphismes $\Phi^\bullet : E^\bullet(A) \to E^\bullet(B)$, $\bullet = s, u$ qui conjuguent $\exp(tA|_{E^\bullet(A)})$ à $\exp(tB|_{E^\bullet(B)})$, pour $\bullet = s, u$. On note

$$\pi_\bullet : \mathbf{R}^n \to E^\bullet(A), \quad \bullet = s, u,$$

les projecteurs spectraux associés à la décomposition $\mathbf{R}^n = E^s(A) \oplus E^u(A)$. On pose

$$\Phi = \Phi^u \circ \pi_u + \Phi^s \circ \pi_s : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

Alors on vérifie aisément que Φ conjugue e^{tA} à e^{tB}.

Exercice 4. *Systèmes linéaires avec second membre*

1. En cherchant une solution particulière sous la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}c(t)$, on trouve que les solutions sont de la forme

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}\left(x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-sA}z(s)\mathrm{d}s\right), \quad t \in \mathbf{R}^n,$$

où $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Soit $T > 0$ tel que pour tout $t \ge T$ on a $\|z(t) - z_\infty\|_A \le \varepsilon$, où $\|\cdot\|_A$ est une norme adaptée à A. Alors

$$\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}z(s)\mathrm{d}s = \int_0^T \mathrm{e}^{(t-s)A}z(s)\mathrm{d}s + \int_T^t \mathrm{e}^{(t-s)A}z(s)\mathrm{d}s.$$

On a

$$\int_T^t \mathrm{e}^{(t-s)A}z(s)\mathrm{d}s = \int_T^t \mathrm{e}^{(t-s)A}(z(s) - z_\infty)\mathrm{d}s + \left(\int_T^t \mathrm{e}^{(t-s)A}\mathrm{d}s\right) z_\infty.$$

Or pour tout $t \ge T$ on a

$$\left\|\int_T^t \mathrm{e}^{(t-s)A}(z(s) - z_\infty)\mathrm{d}s\right\|_A \le \varepsilon \int_T^t \mathrm{e}^{-a(t-s)}\mathrm{d}s \le \frac{\varepsilon}{a}.$$

D'autre part,

$$\int_T^t \mathrm{e}^{(t-s)A}\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{tA}\left[-A^{-1}\mathrm{e}^{-sA}\right]_{s=T}^{s=t} = -A^{-1} + A^{-1}\mathrm{e}^{(t-T)A}.$$

En particulier puisque A est une contraction on a

$$\left(\int_T^t \mathrm{e}^{(t-s)A}\mathrm{d}s\right) z_\infty \to -A^{-1}z_\infty, \quad t \to +\infty.$$

On a aussi que $\mathrm{e}^{tA}\int_0^T \mathrm{e}^{-s}z(s)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{tA}x_0 \to 0$ quand $t \to +\infty$. Tout ce qui précède montre que pour t assez grand on a (pour une constante C dépendant seulement de a)

$$\left\| x(t) + A^{-1}z_\infty \right\| \leq C\varepsilon.$$

On a obtenu que

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = -A^{-1}z_\infty.$$