TP4: Processus stationnaires

MAP-STA2 : Séries chronologiques

Yannig Goude - yannig.goude@edf.fr

Exercice 1

soit ε_t un bruit blanc de variance σ^2, étudier la stationnarité des processus $(X_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ suivants:

- $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$
- $X_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}$ pour $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$
- $X_t = \varepsilon_t\varepsilon_{t-1}$
- $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- $X_t = \varepsilon_t \cos(\omega t) + \varepsilon_{t-1} \sin(\omega t)$
- la somme de 2 processus stationnaires est elle stationnaire?

Exercice 2

- écrire un programme r permettant de simuler le processus suivant (auto-régressif d'ordre 1):

$$y_t = ay_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec ε_t un BB gaussien de moyenne nulle et de variance 1, $a \in -] - 1, 1]$.

- représenter sur un graphique des trajectoires de ce processus pour $a = 0.1$, $a = 0.7$, $a = -0.7$.
- estimer la fonction d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle sur ces trajectoires puis visualiser les corrélogrammes et auto-corrélogrammes. Proposer votre propre implémentation puis utiliser les fonctions acf et pacf de r.
- refaire le même exercice en simulant un processus moyenne mobile:

$$y_t = \varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + a_2\varepsilon_{t-2} + ... + a_q\varepsilon_{t-q}$$

- comparer les résultats obtenus avec ceux vus en cours.

Exercice 3

On considère le processus $X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ où ε_t un bruit blanc de variance σ^2 et $\theta \in] - 1, 1[$.

- montrer que X est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.
- soit $\phi_T, \phi_{T-1}, ..., \phi_1$ les coefficients de la régression linéaire $\widehat{X_{T+1}}$ sur $(X_T, X_{T-1}, ..., X_1)$. Ecrire les conditions d'orthogonalité entre $X_{T+1} - \widehat{X_{T+1}}$ et l'espace engendré par $(X_1, .., X_T)$.
- déterminer la fonction d'auto-correlation partielle de X.