Examen du 19/03/2021

MAP-STA2 : Séries chronologiques

Y. Goude - yannig.goude@edf.fr

Exercice 1

Soit un processus $(X_t)_{t\in Z}$ moyenne mobile infinie tel que $X_t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \varepsilon_{t-i}$ ou ε_t est un bruit blanc de variance σ^2. La suite $(a_i)_{i\in Z}$ est une suite absolument sommable.

1. montrer que sa fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ est bien définie et donner son expression.
2. donner la définition de sa densité spectrale, montrer qu'elle existe et que c'est une fonction réelle.
3. montrer qu'il est équivalent de connaitre sa fonction d'autocovariance ou sa densité spectrale.

Exercice 2

Soit le processus suivant, supposé stationnaire, avec ε_t un bruit blanc de variance σ^2:

$$y_t = \sum_{k=1}^{p} a_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

1. Quel est le nom de ce processus? Donner la formule de sa fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ et celle de sa fonction d'autocorrélation $\rho(h)$.
2. Vérifiez si les deux processus suivants sont stationnaires puis calculer les autocorrélations et autocorrélations partielles d'ordre 1, 2, et 3 pour ces processus.

$$y_t = 0.7y_{t-1} - 0.49y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Exercice 3

soit les processus stationnaires du second ordre Y_t et X_t définis par:

- $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + u_t$
- $X_t = \phi_2 X_{t-1} + v_t$

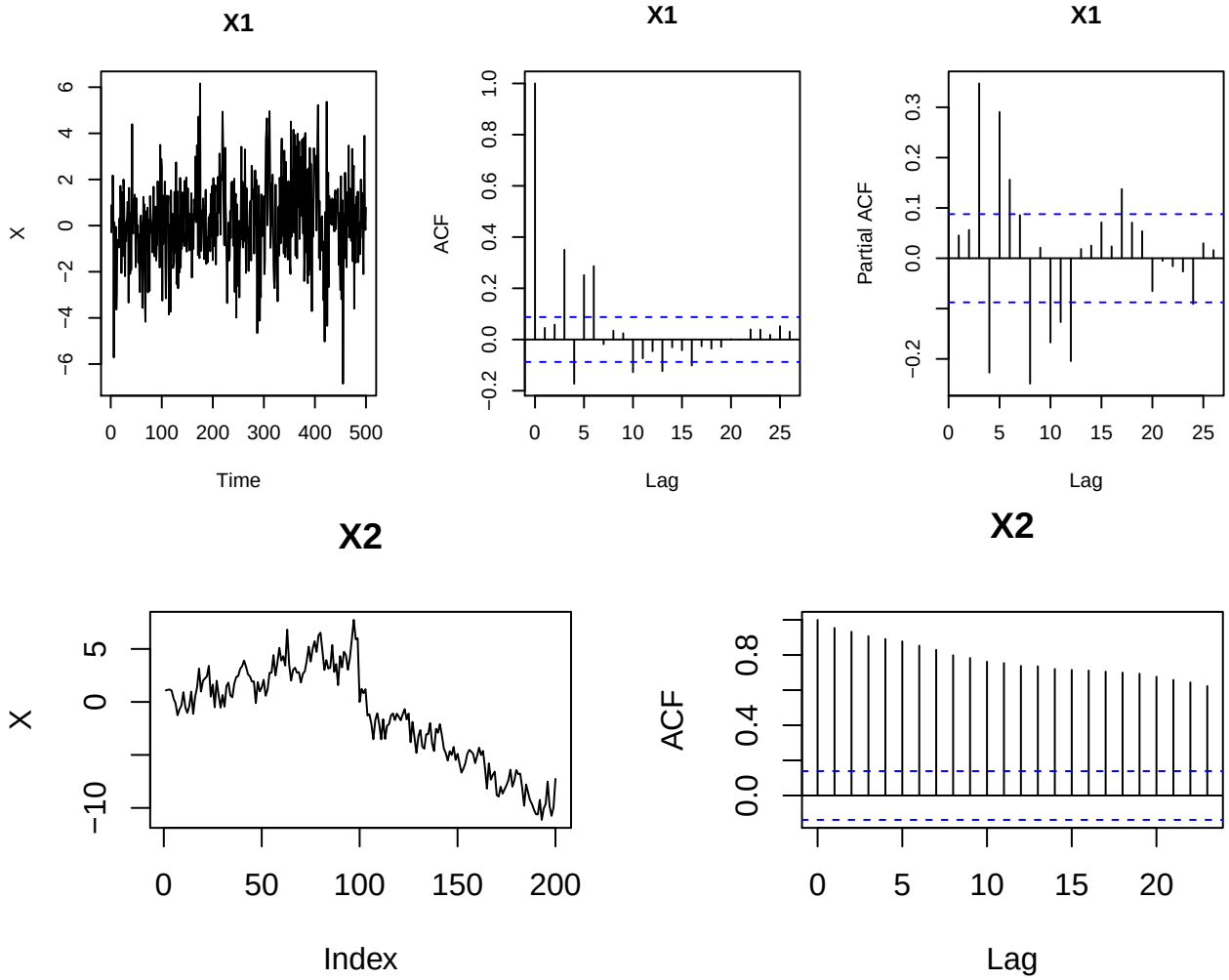
avec u et v deux bruits blancs décorrélés de variances respectives σ_u^2 et σ_v^2, $0 < |\phi_1| < 1$ et $0 < |\phi_2| < 1$.

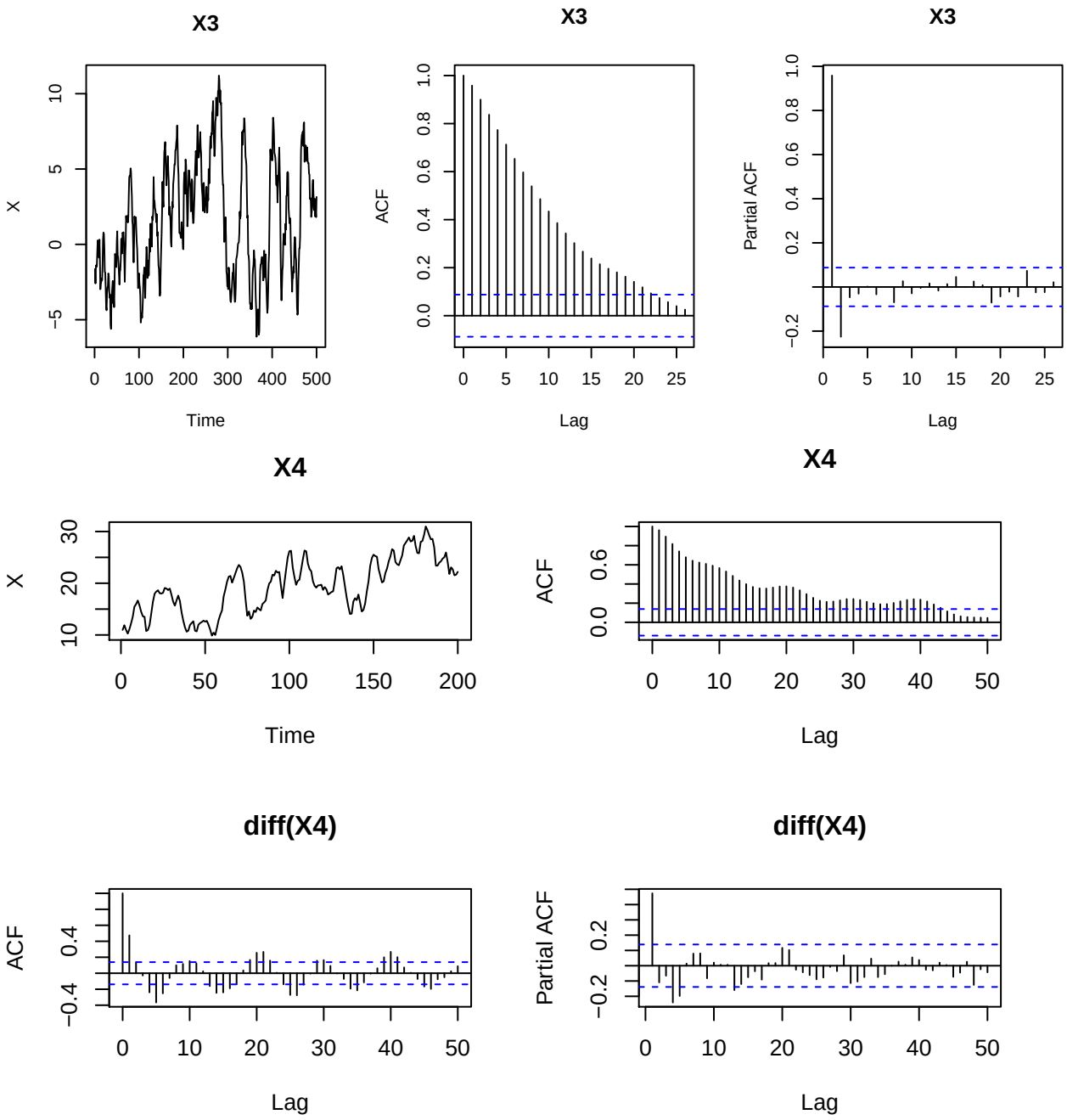
1. soit $W = (1-\phi_1 L)(1-\phi_2 L)Y_t$, montrer que W est stationnaire du second ordre. Calculer sa fonction d'autocovariance γ_W et en déduire que W est un processus MA à déterminer (on supposera que $a^2\sigma_v^2 + (1+\phi_2^2)\sigma_u^2 > 2\phi_2\sigma_u^2$).
2. montrer que Y est un processus ARMA à déterminer.

3. déterminer la prévision optimale à l'instant t notée Y_t^* et la variance de l'erreur de prévision $Var(Y_t - Y_t^*)$.

Exercice 4

Un statisticien étudie un jeux de données composé de 4 séries temporelles pour lesquelles il a représenté/calculé les statistiques suivantes:





1. Proposer une démarche de modélisation pour chacune de ces séries, justifier.
2. Notre statisticien s'intéresse ensuite à une autre série $X5_t$. Il propose de la modéliser par un ARMA et cherche ensuite à valider son modèle. Il obtient les sorties suivantes, à quoi correspond la ligne "s.e"? Comment est calculée la p-value du test de student de nullité de chacun des coefficients? A quoi correspond AIC?

```
##
## Call:
## arima(x = X5, order = c(3, 0, 4), include.mean = T, method = c("ML"))
##
## Coefficients:
##           ar1     ar2     ar3     ma1     ma2     ma3     ma4  intercept
```

```
##       -0.3245  0.2876  0.0359  0.9251  0.0782  0.2621  0.2739    -0.0181
## s.e.   0.2333  0.1918  0.2394  0.2267  0.1939  0.2788  0.1476     0.3326
##
## sigma^2 estimated as 5.203:  log likelihood = -673.49,  aic = 1364.99
```

```
## pvalue student-test:
```

```
##       ar1       ar2       ar3       ma1       ma2       ma3       ma4 intercept
##      0.16      0.13      0.88      0.00      0.69      0.35      0.06      0.96
```

3. Au vu de ces résultats que doit faire notre statisticien?

4. Il s'intéresse ensuite à une série $X6_t$ et effectue un test de Box-Pierce d'ordre 10 sur $X6_t$. Il obtient le résultat suivant:

```
##  lags statistic df    p-value
##    20  29.13311 20 0.08517126
```

à quoi correspond "df"? Quelle est la conclusion de ce test?