THÉORIE DES GROUPES. — *Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents.* Note (*) de **Yves Benoist,** présentée par Henri Cartan.

Soient G un groupe de Lie (résoluble) exponentiel, H l'ensemble des points fixes d'une involution de G; alors la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est sans multiplicité. Si en outre G est nilpotent, nous donnons la formule de Plancherel de cette représentation et en déduisons que tout opérateur différentiel G-invariant sur G/H non nul admet une solution élémentaire tempérée H-invariante.

GROUP THEORY. — Harmonic Analysis on Nilpotent Symmetric Spaces.

Let G be a (solvable) exponential Lie group, H the set of fixed points of an involution of G; then the representation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ *has no multiplicity. If, besides, G is nilpotent, we give the Plancherel formula of this representation and infer from it the existence of an H-invariant tempered elementary solution for every non zero G-invariant differential operator on G/H.*

NOTATIONS. — Soient G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{C}$, σ une involution de G (automorphisme de G tel que $\sigma^2=\mathrm{Id}$),

$$H=\{\, g\in G/g^{\sigma}=g\,\},\quad P=\{\, g\in G/g^{\sigma}=g^{-1}\,\},$$
$$\mathfrak{h}=\{\, X\in\mathfrak{g}/X^{\sigma}=X\,\},\qquad \mathfrak{p}=\{\, X\in\mathfrak{g}/X^{\sigma}=-X\,\},$$

p la projection canonique de G sur G/H et J le difféomorphisme de G défini par $J(g)=g^{-1}$.

Si M est une variété, on note $C_c^{\infty}(M)$ [resp. $\mathscr{M}_c^{\infty}(M)$] l'espace des fonctions (resp. densités) C^{∞} à support compact sur M, à valeur dans $\mathbb{C}$, et $\mathscr{D}'(M)$ [resp. $\mathscr{F}(M)$] son dual qui est l'ensemble des distributions (resp. fonctions généralisées) sur M. On note $\mathscr{F}^+(G)$ l'ensemble des fonctions généralisées de type positif sur G :

$$\mathscr{F}^+(G)=\{\, T\in\mathscr{F}(G)/\forall\,\mu\in\mathscr{M}_c^{\infty}(G)\ \text{on a}\ (T,\ J_*(\mu)*\mu)\geqq 0\,\}.$$

Si π est une représentation unitaire (continue) de G dans un Hilbert $\mathscr{H}_\pi$, on note $\mathscr{H}_\pi^{\infty}$ le Fréchet des vecteurs C^{∞} et $\mathscr{H}_\pi^{-\infty}$ l'espace des formes antilinéaires continues sur $\mathscr{H}_\pi^{\infty}$. Pour a dans $\mathscr{H}_\pi^{-\infty}$ et b dans $\mathscr{H}_\pi^{\infty}$, on note $\langle a, b\rangle$ l'image de b par a et $\langle b, a\rangle=\overline{\langle a, b\rangle}$. Pour a et b dans $\mathscr{H}_\pi^{-\infty}$, on note $T_{a,\,b}^{\pi}$ la fonction généralisée sur G, coefficient du couple (a, b) définie par : pour $\mu\in\mathscr{M}_c^{\infty}(G)$, $(T_{a,\,b}^{\pi},\ \mu)=\langle\pi(\mu)a, b\rangle$ [car $\pi(\mu)a\in\mathscr{H}_\pi^{\infty}$]. On dit que a de $\mathscr{H}_\pi^{-\infty}$ est cyclique s'il n'existe pas d'élément v non nul de $\mathscr{H}_\pi^{\infty}$ tel que, pour tout g de G, on ait $\langle a, \pi(g)v\rangle=0$.

Soient L un sous-groupe de G et c un caractère de L; on note :

$$(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{L,\,c}=\{\, a\in\mathscr{H}_\pi^{-\infty}/\forall\, l\in L,\ \pi(l)a=c(l)a\,\},$$

et, pour $c=1$, $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{L}=(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{L,\,1}$; on note Δ_L la fonction module de L. Si a est dans $(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H}$, il existe une unique fonction généralisée S_a^{π} sur G/H telle que $T_{a,\,a}^{\pi}=S_a^{\pi}\circ p$.

Soient $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ les algèbres symétrique et enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$; on note par le même symbole ad (resp. Ad) l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ (resp. G) dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ ou $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. On note β la symétrisation de $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sur $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

I. Commençons par un lemme analogue à la décomposition de Cartan dans un groupe de Lie semi-simple.

LEMME 1. — *Si* G *est (résoluble) exponentiel (dans ce cas* G *est connexe et simplement connexe), alors :*

(a) l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{p} \to P$ *est un difféomorphisme ;*

(b) la multiplication $m : P \times H \to G$ *est un difféomorphisme.*

On note $\dot{\exp}$ le difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur G/H tel que : $\forall X \in \mathfrak{p}$, $\dot{\exp}(X) = p(\exp(X))$.

Ce résultat peut être faux pour G résoluble non exponentiel : soit G_1 le revêtement universel du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$; $G_1 = \{ (\theta, a, b)/(\theta, a, b) \in \mathbb{R}^3 \}$ est muni de la loi :

$$(\theta, a, b).(\theta', a', b') = (\theta + \theta', a + a' \cos\theta + b' \sin\theta, b - a' \sin\theta + b' \cos\theta).$$

Soit σ_1 l'involution donnée par $\sigma_1((\theta, a, b)) = (-\theta, a, -b)$; alors la multiplication $m : P_1 \times H_1 \to G_1$ n'est pas surjective.

II. Soit $\hat{G}$ le dual unitaire de G ; si $\zeta \in \hat{G}$, π_ζ désigne un représentant de la classe ζ ; on note $\overline{\zeta}$ la classe de la représentation $\overline{\pi_\zeta}$ conjugée de π_ζ et ζ^σ la classe de la représentation $\pi_\zeta \circ \sigma$. On note $(\hat{G})_\sigma = \{ \zeta \in \hat{G} / \overline{\zeta} = \zeta^\sigma \}$.

PROPOSITION 1. — *Soit* L *un sous-groupe de* G *stable par* σ *tel qu'il existe une sous-variété* Q *de* G *vérifiant :* (i) *la multiplication* $m : L \times Q \to G$ *est une submersion surjective,* (ii) *pour* l *dans* L, $lQl^{-1} = Q$, (iii) *pour* q *dans* Q *on a* $q^{-1} \in Q$ *et* $qq^\sigma \in L$, *(par exemple si* G *est exponentiel :* $L = H$, *avec* $Q = P$). *Soit* c *un caractère de* L *tel que :* (i) $\overline{c} = c \circ \sigma$, (ii) $\forall q \in Q$ *on a* $c(q\, q^\sigma) \in \mathbb{R}^+$. *Soit* π *une représentation de* G *ayant un vecteur cyclique* a *tel que* $a \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{L,\, c}$ *[par exemple* $\pi = \mathrm{Ind}_L^G(1)$ *admet pour vecteur cyclique* δ *« l'évaluation en e » et* $\delta \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{L,\, c}$ *si on prend* $c(e) = (\Delta_L(l)/\Delta_G(l))^{1/2}$, $\forall l \in L$]. *Alors :*

(a) la représentation π *est sans multiplicité (son commutant est commutatif) et il existe une mesure positive bornée standard* m *sur* $\hat{G}$ *telle que* π *soit équivalente à* $\int_{\hat{G}}^{\oplus} \zeta \, dm(\zeta)$; *m est portée par* $(\hat{G})_\sigma$;

(b) $\forall \zeta \in \hat{G}$, *on a* $\dim(\mathscr{H}_{\pi_\zeta}^{-\infty})^{L,\, c} \leqq 1$, *l'égalité ne pouvant avoir lieu que si* ζ *est dans* $(\hat{G})_\sigma$.

Si on ne suppose pas l'existence de Q, la conclusion de cette proposition peut être fausse ; en effet si $G = G_1$ et $\sigma = \sigma_1$, la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est de multiplicité 2.

III. Dans cette partie G est exponentiel. Rappelons que P. Bernat a construit une bijection, que nous noterons θ, de l'ensemble $G \backslash \mathfrak{g}^*$ des orbites de G dans le dual de son algèbre de Lie pour l'action coadjointe dans $\hat{G}$ ([2], chap. VI 2.0).

Remarquons que si Ω est une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$, alors $-\Omega$ et $({}^t\sigma)(\Omega) = \Omega^\sigma$ sont des orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ et on a $\theta(-\Omega) = \overline{\theta(\Omega)}$ et $\theta(\Omega^\sigma) = (\theta(\Omega))^\sigma$.

Désignons par $\mathfrak{h}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^*$; l'action coadjointe restreinte à H laisse stable $\mathfrak{h}^\perp$. On note $H \backslash \mathfrak{h}^\perp$ l'espace des orbites.

LEMME 2. — *(a) Soit* $\Omega \in G \backslash \mathfrak{g}^*$; *on a équivalence entre* (i) $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$ *et* (ii) $\Omega^\sigma = -\Omega$. *En outre, pour* f *dans* $\mathfrak{h}^\perp$, *on a* $G.f \cap \mathfrak{h}^\perp = H.f$;

(b) l'application $\omega \to \zeta_\omega = \theta(G.\omega)$ *est une bijection de* $H \backslash \mathfrak{h}^\perp$ *sur* $(\hat{G})_\sigma$.

COROLLAIRE. — *Il existe une mesure positive* ν *sur* $H \backslash \mathfrak{h}^\perp$ *telle que la représentation* $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ *soit équivalente à* $\int_{H \backslash \mathfrak{h}^\perp}^{\oplus} \zeta_\omega \, d\nu(\omega)$.

On pourra comparer à [3] ; le résultat nouveau est l'absence de multiplicité.

IV. DÉSORMAIS G EST NILPOTENT, CONVEXE ET SIMPLEMENT CONNEXE. — Notons F la transformation de Fourier définie sur l'espace des distributions tempérées sur un espace

vectoriel V de dimension finie, à valeurs dans l'espace des fonctions généralisées tempérées sur le dual V*, de sorte que si μ est une mesure bornée, on ait :

$$F(\mu)(f)=\int_V e^{if(x)}\,d\mu(x), \qquad \forall f\in V^*$$

(pour nous, $V=\mathfrak{p}^*=\mathfrak{h}^\perp$ et $V^*=\mathfrak{p}$).

THÉORÈME. — *Soient* ω *dans* $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ *et* π_ω *un représentant de* ζ_ω, *(on rappelle que* ω *est fermée et qu'une mesure* H*-invariante sur* ω *est tempérée; cf.* [6], *chap.* 5.4). *Alors :*

(*a*) $\dim(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H\leq 1$;

(*b*) *soit* a_ω *dans* $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$ *et notons* $S_\omega=S_{a_\omega}^{\pi_\omega}$ [*élément de* $\mathscr{F}(G/H)$] ; *il existe alors une mesure* H*-invariante* β_ω *sur* $\mathfrak{h}^\perp$ *portée par* ω, *pour laquelle on a l'égalité de fonctions généralisées :* $S_\omega\circ\exp=F(\beta_\omega)$.

Ceci généralise la formule du caractère d'un groupe de Lie nilpotent ([4] th. 7.4).

COROLLAIRE 1. — *Notons :*

$${}^H\mathscr{F}^+(\mathfrak{p})=\{\,R\in\mathscr{F}^+(\mathfrak{p})/\forall h\in H,\ R\circ \mathrm{Ad}h=R\,\}$$

et :

$$\mathscr{F}^+(G/H)=\{\,S\in\mathscr{F}(G/H)/S\circ p\in\mathscr{F}^+(G)\,\};$$

l'application $S\to S\circ\exp$ *est une bijection de* $\mathscr{F}^+(G/H)$ *sur* ${}^H\mathscr{F}^+(\mathfrak{p})$.

Ceci généralise le théorème de [7].

COROLLAIRE 2. — *Soient* $\mu_{G,H}$ *une mesure* G*-invariante sur* G/H, *dP la mesure de Lebesgue sur* $\mathfrak{p}$ *telle que* $\exp_*(dP)=\mu_{G,H}$ *et* μ *la mesure sur* $\mathfrak{h}^\perp$ *duale de dP. Soient* ν' *une mesure sur* $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ *proimage de* μ *et* $(\pi_\omega)_{\omega\in H\backslash\mathfrak{h}^\perp}$ *un champ* ν'*-mesurable de représentations de* $G(\pi_\omega\in\zeta_\omega)$, *on peut choisir de façon* ν'*-mesurable* a_ω *dans* $(\mathscr{H}_{\pi_\omega}^{-\infty})^H$, ν'*-presque partout non nuls. Soient* S_ω *et* β_ω *comme dans le théorème ; alors* $(\beta_\omega)_{\omega\in H\backslash\mathfrak{h}^\perp}$ *est la désintégration de* μ *par rapport à une unique mesure* ν *sur* $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ (ν' *est équivalente à* ν) ; *et on a l'égalité :*

$$\forall\varphi\in C_c^\infty(G/H),\quad \varphi(H)=\int_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp}(S_\omega,\varphi.\mu_{G,H})\,d\nu(\omega).$$

Cette formule de synthèse harmonique généralise la formule de Plancherel d'un groupe de Lie nilpotent.

V. On note :

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g}_C)^{\mathfrak{h}}=\{\,U\in\mathscr{U}(\mathfrak{g}_C)/\forall X\in\mathfrak{h},\ \mathrm{ad}\,X.U=0\,\}$$

et :

$$S(\mathfrak{p}_C)^{\mathfrak{h}}=\{\,V\in S(\mathfrak{p}_C)/\forall X\in\mathfrak{h},\ \mathrm{ad}\,X.V=0\,\}.$$

Rappelons que l'algèbre :

$$A=\mathscr{U}(\mathfrak{g}_C)^{\mathfrak{h}}/\mathscr{U}(\mathfrak{g}_C)^{\mathfrak{h}}\cap\mathscr{U}(\mathfrak{g}_C).\mathfrak{h}$$

est isomorphe de façon canonique à l'algèbre $^{G}(OD(G/H))$ des opérateurs différentiels linéaires à coefficients C^∞ G-invariants sur G/H. La symétrisation β envoie $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ et définit par passage au quotient un isomorphisme d'espaces vectoriels $\hat{\beta}$ de $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ sur A.

Soient ω dans $H\widehat{\ }\mathfrak{h}^{\perp}$ et π_ω dans ζ_ω, choisissons a_ω, dans $(\mathscr{H}^{-\infty}_{\pi_\omega})^{H}-\{0\}$. Si U est dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$, $D\pi_\omega(U)\,a_\omega$ est dans $(\mathscr{H}^{-\infty}_{\pi_\omega})^{H}$; donc il existe un nombre complexe $\lambda_\omega(U)$ qui ne dépend que de ω et de U tel que $D\pi_\omega(U)\,a_\omega=\lambda_\omega(U)\,a_\omega$. L'application $U\to\lambda_\omega(U)$ est un caractère de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ nul sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}\cap\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}).\mathfrak{h}$; il définit donc par passage au quotient un caractère $\hat{\lambda}_\omega$ de A.

Tout élément V de $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$ s'identifie à une fonction polynome sur $\mathfrak{p}^*=\mathfrak{h}^{\perp}$ constante sur les orbites de H; on note $V(\omega)$ la valeur commune des $V(f)$ pour f dans ω.

LEMME 3. — *Pour tout* ω *dans* $H\widehat{\ }\mathfrak{h}^{\perp}$ *et* V *dans* $S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$, *on a l'égalité :*

$$\hat{\lambda}_\omega(\hat{\beta}(V))=V(i\omega).$$

Ceci généralise le théorème 7.2 de [4].

COROLLAIRE. — *L'application* $\hat{\beta}: S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}\to A$ *est un isomorphisme d'algèbres.*

Nous avions déjà montré ce résultat par une méthode entièrement algébrique dans [1].

Notons $\lambda(g)$, pour g dans G, la translation à gauche par g dans G/H.

PROPOSITION 2. — *Soit* D *dans* $^{G}(OD(G/H))$, *un opérateur différentiel* G-*invariant sur* G/H *non nul. Alors il existe une distribution* E *sur* G/H *vérifiant :*

(i) E *est tempérée* [*i. e.* $(\exp)^{-1}_{*}(E)$ *est tempérée sur* $\mathfrak{p}$];

(ii) E *est* H-*invariante* [*i. e. pour tout h dans* H *on a* $\lambda(h)_*(E)=E$];

(iii) E *est solution élémentaire de* D [*i. e.* $D(E)=\delta_{(H)}$ *masse de Dirac en* H].

On en déduit que D est semi-globalement résoluble [i. e. $D(C^\infty(G/H))\supset C^\infty_c(G/H)$].

La démonstration de cette proposition utilise d'une part nos résultats d'analyse harmonique et d'autre part une technique due à M. Raïs [5] basée sur des théorèmes de prolongement de distributions tempérées de M. F. Atiyah et I. N. Bernstein.

(*) Remise le 21 février 1983.

[1] Y. BENOIST, *Comptes rendus*, 295, série I, 1982, p. 59.

[2] P. BERNAT et coll., *Mono Soc. Math. Fr.*, n° 4, Dunod, Paris, 1972.

[3] I. K. BUSUYATSKAYA, *Funct. Anal. and Appl.*, 7, 1973, p. 151-152.

[4] A. A. KIRILLOV, *Uspek. Mat. Nauk.*, 17, n° 4, 1962, p. 57-110.

[5] M. RAIS, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 495.

[6] M. RAIS, *Représentations des groupes de Lie nilpotents et méthode des orbites*, C.I.M.P.A., Université Nancy-I, 1980.

[7] G. SCHIFFMANN, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 96, 1968, p. 347-355.

Ecole normale supérieure, 45, *rue d'Ulm*, 75230 *Paris Cedex* 05.